ANALYSE NUMERIQUE

Session de 1988

REMARQUES IMPORTANTES

1°) Les démonstrations claires et complètes seront particulièrement appréciées, même si elles ne portent que sur quelques parties du problème.

2°) On gagnera en concision en utilisant les références chiffrées placées devant la plupart des formules, définitions ou relations de l'énoncé.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

Le cadre de tout le problème est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$. On notera $\mathcal{M}_N$ l'espace des matrices réelles à N lignes et N colonnes, $\mathcal{S}_N$ le sous-ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{P}_N$ celui des matrices symétriques définies positives. Tout élément de $\mathbb{R}^N$ sera identifié à une matrice à une colonne.

Pour A élément de $\mathcal{P}_N$, on notera

(1) $$(x, y)_A = y^T A x \quad , \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N$$

le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}^N$,

(2) $$\|x\|_A = (x^T A x)^{1/2} \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

la norme correspondante, et

(3) $$\|M\|_A = \max_{x \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \frac{\|Mx\|_A}{\|x\|_A} \quad , \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_N$$

la norme d'opérateur associée. On notera M_A^* l'adjoint de $M \in \mathcal{M}_N$ relativement au produit scalaire (1).

Pour M élément de $\mathcal{M}_N$, on notera $\Lambda(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres et $\rho(M)$ son rayon spectral défini par

(4) $$\rho(M) = \max \{|\lambda| \; ; \; \lambda \in \Lambda(M)\} \; .$$

Lorsque $\Lambda(M)$ est dans $\mathbb{R}$, on notera $\lambda_1(M)$ la plus petite et $\lambda_N(M)$ la plus grande des valeurs propres de M.

Pour M élément inversible de $\mathcal{M}_N$, on utilisera la notation M^{-T} pour $(M^{-1})^T$ et $(M^T)^{-1}$ qui sont égales.

Le conditionnement de M élément inversible de $\mathcal{M}_N$ est défini par

(5) $$\kappa(M) = \|M\| \cdot \|M^{-1}\| \; ,$$

où $\|M\| = \|M\|_I$ (voir (3)), I désignant la matrice identité.

L'objet du problème est d'étudier des méthodes itératives pour la résolution du système linéaire

(6) $$Ax^* = b$$

où A et b sont donnés, respectivement dans $\mathcal{P}_N$ et $\mathbb{R}^N$, x^* de $\mathbb{R}^N$ étant la solution.

On utilisera la fonctionnelle $J_{A,b}$ définie sur $\mathbb{R}^N$ par

(7) $$J_{A,b}(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \; .$$

PRELIMINAIRES

Q 1 . Etablir l'égalité

(8) $$\Lambda(M_1 M_2) = \Lambda(M_2 M_1) \quad , \quad \forall\, M_1, M_2 \in \mathcal{M}_N \; ,$$

et en déduire

(9) $$\rho(M_1 M_2) = \rho(M_2 M_1) \quad , \quad \forall\, M_1, M_2 \in \mathcal{M}_N \; .$$

Q 2 . Montrer que tout élément S de $\mathcal{S}_N$ vérifie les relations

(10) $$\lambda_1(S) = \min_{x \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \frac{x^T S x}{x^T x} \quad , \quad \lambda_N(S) = \max_{x \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \frac{x^T S x}{x^T x} \; .$$

On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de S .

Q 3 . Montrer que pour C élément de $\mathcal{P}_N$ et S élément de $\mathcal{S}_N$, on a les relations

(11) $$\lambda_1(C^{-1}S) = \min_{x \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \frac{x^T S x}{x^T C x} \quad , \quad \lambda_N(C^{-1}S) = \max_{x \in \mathbb{R}^N - \{0\}} \frac{x^T S x}{x^T C x}$$

On pourra utiliser la factorisation $C = L L^T$ de Cholesky.

Q 4 . Dans le cadre de $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire (1) :

a) donner l'expression de M_A^* en fonction de A et M^T, pour M élément de $\mathcal{M}_N$;

b) établir les relations

(12) $$\|M\|_A^2 = \rho(M_A^* M) = \|M_A^*\|_A^2 \quad , \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_N \; ;$$

c) montrer, pour M autoadjoint ($M_A^* = M$), que

(13) $$\|M\|_A = \rho(M) \; ,$$

et en déduire :

(14) $$\kappa(M) = \lambda_N(M)/\lambda_1(M) \quad , \quad \forall\, M \in \mathcal{P}_N \; ;$$

d) q étant un polynôme réel, montrer que :

(15) $$\|q(A)\|_A = \max\{|q(\lambda)| \; ; \; \lambda \in \Lambda(A)\} \; .$$

Tournez la page S. V. P.

Q 5 . Suivant les définitions (6), (7)

a) établir l'identité

(16) $$J_{A,b}(x) = J_{A,b}(x^*) + \frac{1}{2}\|x^* - x\|_A^2 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N ,$$

et en déduire que x^* est l'unique solution du problème de minimisation

(17) $$\min\{J_{A,b}(x) \; ; \; x \in \mathbb{R}^N\} \; ;$$

b) montrer que si x_o est donné dans $\mathbb{R}^N$ et que K est une matrice à N lignes et r colonnes, avec rang $(K) = r \leq N$, le problème de minimisation

(18) $\min\{J_{A,b}(x) \; ; \; x = x_o + Kz \; , \; z \in \mathbb{R}^r\}$ admet l'unique solution

(19) $$x = x_o + K(K^T A K)^{-1} K^T A (x^* - x_o) \; ;$$

c) B étant un élément inversible de $\mathcal{M}_N$, on effectue le changement de variable (20) $$\tilde{x} = B^T x \; .$$

Déterminer $\tilde{A}$, $\tilde{b}$ définis par (21) $$J_{A,b}(x) = J_{\tilde{A},\tilde{b}}(\tilde{x}) \; ,$$

et montrer que (22) $$\kappa(\tilde{A}) = \lambda_N(C^{-1}A)/\lambda_1(C^{-1}A)$$

où C est l'élément de $\mathcal{P}_N$ défini par (23) $$C = B\,B^T .$$

Dans la suite le système de matrice $\tilde{A}$ et de second membre $\tilde{b}$ sera appelé système préconditionné, C étant dit préconditionneur, le but étant d'avoir $\kappa(\tilde{A})$ plus petit que $\kappa(A)$.

PARTIE 1

Dans le but de mieux comprendre ce que peut être un bon préconditionneur C pour A , on définit, compte tenu de (22), l'application σ de $\mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N$ dans $[1 , +\infty[$ par (24) $$\sigma(P_1 , P_2) = \lambda_N(P_2^{-1} P_1) / \lambda_1(P_2^{-1} P_1) \quad , \quad \forall\, (P_1 , P_2) \in \mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N$$

Q 6 .

a) Montrer que σ vérifie les propriétés suivantes

(25) $$\sigma(P_1 , P_2) = \sigma(P_2 , P_1) \quad , \quad \forall\, P_1 , P_2 \in \mathcal{P}_N$$

(26) $$\sigma(\alpha_1 P_1 , \alpha_2 P_2) = \sigma(P_1 , P_2) \quad , \quad \forall\, P_1 , P_2 \in \mathcal{P}_N \quad , \quad \forall\, \alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$$

(27) $$\sigma(P_1 , P_2) \leq \sigma(P_1 , P_3)\, \sigma(P_3 , P_2) \quad , \quad \forall\, P_1 , P_2 , P_3 \in \mathcal{P}_N \; .$$

b) Montrer que la relation définie dans $\mathcal{P}_N$ par

(28) $$P_1 \; \mathcal{R} \; P_2 \quad \text{ssi} \quad \sigma(P_1 , P_2) = 1$$

est une relation d'équivalence qui s'exprime simplement par : $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $P_2 = \alpha P_1$.

c) Montrer qu'on peut définir pour l'ensemble quotient $\mathcal{P}_N/\mathcal{R}$ l'application $\dot{\sigma}$ par

(29) $$\dot{\sigma}(\dot{P}_1 , \dot{P}_2) = \sigma(Q_1 , Q_2) \quad , \quad \forall\, Q_1 \in \dot{P}_1 \quad , \quad \forall\, Q_2 \in \dot{P}_2$$

en notant $\dot{P}$ la classe d'équivalence de P , et une distance

(30) $$d_\phi = \phi \circ \dot{\sigma}$$

avec $\phi : [1 , +\infty[\to \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \quad , \quad \phi(t_1 t_2) \leq \phi(t_1) + \phi(t_2) \; .$$

Vérifier que d_1 , d_2 correspondant respectivement aux fonctions $\phi_1(t) = (t-1)/(t+1)$ et $\phi_2(t) = (\sqrt{t} - 1)(\sqrt{t} + 1)$ sont de telles distances.

Q 7 . Pour la résolution itérative de (6), on considère la méthode associée à P élément de $\mathcal{P}_N$, dont chaque pas est défini par

(31) $$P(x_{k+1} - x_k) = b - Ax_k \; .$$

a) Montrer que la matrice d'itération correspondante est $I - P^{-1}A$ et vérifie

(32) $$\|I - P^{-1}A\|_A = \rho(I - P^{-1}A) \; .$$

b) En utilisant la notation

(33) $$\dot{\rho}(A,C) = \min\{\|I - P^{-1}A\|_A \; ; \; P \in \dot{C}\} \quad ,$$

montrer que

(34) $$\dot{\rho}(A,C) = \min\{\rho(I - \alpha C^{-1}A) \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}\} = \frac{\sigma(A,C) - 1}{\sigma(A,C) + 1} \quad ,$$

la solution du min étant

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_1(C^{-1}A) + \lambda_N(C^{-1}A)} \; .$$

c) Vérifier les relations (voir Q 6 , c)

(35) $$\dot{\rho}(A,C) = d_1(\dot{A} , \dot{C})$$

(36) $$\kappa(\tilde{A}) = \frac{1 + d_1(\dot{A} , \dot{C})}{1 - d_1(\dot{A} , \dot{C})}$$

qui montrent que l'étude de $\dot{\rho}(A , C)$ et celle de $\kappa(\tilde{A})$ sont liées, et que l'intuition que leur résultat est d'autant meilleur que "C est une bonne approximation de A" est justifiée rigoureusement par la distance d_1 .

Tournez la page S. V. P.

Q 8 . On considère ici, pour résoudre (6), une méthode itérative associée à M inversible non nécessairement dans $\mathcal{P}_N$:

$$M(x_{k+1} - x_k) = b - Ax_k \quad (37)$$

et on va construire une méthode associée à une matrice C de $\mathcal{P}_N$ comme à la question précédente. On note U la matrice d'itération de la méthode (37).

Cette méthode s'obtient par symétrisation de (37) : chaque pas consiste à effectuer un pas de la méthode (37) suivi d'un pas de la méthode obtenue en remplaçant M par M^T dans (37) (matrice d'itération notée V), c'est-à-dire que x_{k+1} est déduit de x_k par l'intermédiaire de $x_{k+1/2}$:

$$(38) \quad \begin{cases} M(x_{k+1/2} - x_k) = b - Ax_k \\ M^T(x_{k+1} - x_{k+1/2}) = b - Ax_{k+1/2} \end{cases}$$

et on note W la matrice d'itération de cette méthode symétrisée.

a) Montrer que

$$V = U_A^* \quad , \quad W = U_A^* U \quad ; \quad (39)$$

en déduire que la méthode (39) converge ssi $M + M^T - A$ est dans $\mathcal{P}_N$ et qu'elle peut alors s'écrire

$$C(x_{k+1} - x_k) = b - Ax_k \quad , \quad (40)$$

avec

$$C = M(M + M^T - A)^{-1} M^T \quad (41)$$

élément de $\mathcal{P}_N$, vérifiant

$$\Lambda(C^{-1}A) \subset]0, 1] \quad . \quad (42)$$

b) Etablir l'équivalence

$$\|I - M^{-1}A\|_A < 1 \Leftrightarrow M + M^T - A \in \mathcal{P}_N \quad . \quad (43)$$

Q 9 . On va appliquer les résultats de la question précédente à la méthode classique dite de relaxation qui consiste à remplacer dans (37) M par

$$M(\omega) = \frac{1}{\omega} D - E \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad (44)$$

en utilisant les notations classiques pour la décomposition

$$A = D - E - E^T \quad , \quad (45)$$

où $D_{ij} = \delta_{ij} A_{ij}$, $E_{ij} = \begin{cases} -A_{ij} & \text{si } j < i \\ 0 & \text{si } j \geq i \end{cases}$.

a) Etablir l'équivalence

$$M(\omega) + M(\omega)^T - A \in \mathcal{P}_N \Leftrightarrow \omega \in]0, 2[\quad (46)$$

et montrer que pour $\omega \in]0, 2[$, la méthode symétrisée s'écrit sous la forme (40) en remplaçant C par

$$C(\omega) = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)\left(\frac{2-\omega}{\omega} D\right)^{-1}\left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^T \quad . \quad (47)$$

b) Si on note U(ω) la matrice d'itération de la méthode de relaxation, établir l'équivalence

$$\|U(\omega)\|_A < 1 \Leftrightarrow \omega \in]0, 2[\quad , \quad (48)$$

et déduire la c.n.s. de convergence

$$\rho(U(\omega)) < 1 \Leftrightarrow \omega \in]0, 2[\quad (49)$$

après avoir vérifié que $\det(U(\omega)) = (1-\omega)^N$.

PARTIE 2

La suite étant consacrée aux méthodes du gradient conjugué (G.C.) et du gradient conjugué préconditionné, on rappelle d'abord l'algorithme et les propriétés fondamentales de la méthode du G.C. pour la résolution du système (6) à matrice symétrique définie positive.

En notant d_k chaque vecteur déplacement et r_k le résidu de x_k , soit

$$r_k = A x_k - b \quad , \quad (50)$$

l'algorithme du G.C. s'écrit (x_o à choisir) :

$$(51) \quad \begin{aligned} & r_o = Ax_o - b \ ; \ d_o = -r_o \\ & \underline{k \geq 0} : \begin{cases} \alpha_k = r_k^T r_k / d_k^T A d_k \\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \\ r_{k+1} = r_k + \alpha_k A d_k \\ \beta_k = r_{k+1}^T r_{k+1} / r_k^T r_k \\ d_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k d_k \end{cases} \end{aligned}$$

On montre que, quel que soit x_o , il existe $m \leq N$ tel que :

$$(52) \quad \begin{cases} x_m = x^* \ \text{(solution du système (6))} \\ r_k^T d_\ell = d_k^T A d_\ell = r_k^T r_\ell = 0 \quad , \quad 0 \leq \ell < k \leq m \end{cases}$$

Dans toute la suite on notera e_k le vecteur erreur :

$$e_k = x_k - x^* \quad . \quad (53)$$

Tournez la page S. V. P.

Q 10 .

a) Pour $k \geq 1$, montrer, en utilisant (18)-(19), que x_k vérifie

$$(54) \qquad J_{A,b}(x_k) = \min\{J_{A,b}(x_o + \sum_{i=o}^{k-1} \xi_i d_i) \; ; \; \xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1} \in \mathbb{R}\}$$

et en déduire que e_k vérifie

$$(55) \qquad \|e_k\|_A = \min\{\|(I + Aq(A))e_o\|_A \; ; \; q \in Q_{k-1}\}$$

où Q_k désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k, ainsi que la majoration ($e_o \neq 0$) :

$$(56) \qquad \|e_k\|_A / \|e_o\|_A \leq \min\{ \max_{\lambda \in \Lambda(A)} |1 + \lambda q(\lambda)| \; ; \; q \in Q_{k-1}\} .$$

b) En utilisant les résultats suivants où T_k désigne le polynôme de Tchebychev de degré k, avec $\alpha > \beta > 0$:

$$(57) \qquad \left| \begin{array}{l} T_k(t) = \mathrm{ch}(k \, \mathrm{Arg\,ch}\, t) \quad , \quad t > 1 \\ \min\{ \max_{t \in [\alpha,\beta]} |1 + tq(t)| \; ; \; q \in Q_{k-1}\} = \dfrac{1}{T_k(\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha})} \; , \end{array} \right.$$

établir les majorations (on suppose $K(A) > 1$) :

$$(58) \qquad \|e_k\|_A / \|e_o\|_A \leq \frac{1}{T_k(\frac{K(A)+1}{K(A)-1})} \leq 2(\frac{\sqrt{K(A)}-1}{\sqrt{K(A)}+1})^k .$$

Q 11 . Le nombre de pas à faire avec (51) pour atteindre une précision $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire pour assurer

$$(59) \qquad \|e_k\|_A / \|e_o\|_A \leq \varepsilon$$

quel que soit le choix de x_o est

$$(60) \qquad k(\varepsilon) = \min\{k \, , \, k \in \mathbb{N} \text{ et } \max_{e_o \neq 0} (\|e_k\|_A / \|e_o\|_A) \leq \varepsilon\} .$$

Montrer que :

$$(61) \qquad k(\varepsilon) \leq \frac{\sqrt{K(A)}}{2} \mathrm{Ln}(\frac{2}{\varepsilon}) + 1 ,$$

après avoir établi l'inégalité $\mathrm{Ln}\frac{t+1}{t-1} > \frac{2}{t}$, $t > 1$.

Q 12 . En choisissant un préconditionneur (voir Q 5, c) on obtient la méthode du gradient conjugué préconditionné (G.C.P.) correspondante pour résoudre le système $Ax = b$ en construisant la suite $x_k = B^{-T} \tilde{x}_k$, où $\tilde{x}_k$ est la suite obtenue en appliquant la méthode du G.C. au système préconditionné $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

a) Montrer que dans la méthode du G.C.P. correspondant au préconditionneur C, l'erreur vérifie

$$(62) \qquad \|e_k\|_A / \|e_o\|_A \leq 2(\frac{\sqrt{K(\tilde{A})}-1}{\sqrt{K(\tilde{A})}+1})^k = 2 \, d_2(\dot{A}, \dot{C})^k .$$

d'après Q 5 et Q 6 .

b) Montrer que la suite x_k du G.C.P. peut être construite directement par l'algorithme suivant :

$$r_o = Ax_o - b \; ; \; g_o = C^{-1} r_o \; ; \; p_o = -g_o$$

$\underline{k \geq 0}$:

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_k = r_k^T g_k / p_k^T A p_k \\ x_{k+1} = x_k + \tilde{\alpha}_k p_k \\ r_{k+1} = r_k + \tilde{\alpha}_k A p_k \\ g_{k+1} = C^{-1} r_{k+1} \\ \tilde{\beta}_k = r_{k+1}^T g_{k+1} / r_k^T g_k \\ p_{k+1} = -g_{k+1} + \tilde{\beta}_k p_k \end{array} \right.$$

PARTIE 3

La suite consiste en une étude du préconditionneur $C(\omega)$, $\omega \in]0, 2[$, défini à partir de A par (47), connu sous le nom de préconditionneur S.S.O.R. (Symmetric Successive Over Relaxation), du fait qu'il a été obtenu par symétrisation de la méthode de relaxation dite S.O.R.

Q 13 . a) En utilisant un résultat de Q 8, montrer que

$$(63) \qquad \sigma(A, C(\omega)) \leq \max_{x \neq 0} \frac{x^T C(\omega) x}{x^T A x} .$$

b) Vérifier l'identité

$$(64) \qquad C(\omega) = \frac{1}{2-\omega} [A + \frac{(2-\omega)^2}{4\omega} D + \omega(ED^{-1}E^T - \frac{1}{4}D)]$$

et déduire la majoration

$$(65) \qquad \sigma(A, C(\omega)) \leq \frac{1}{2-\omega} [1 + \frac{(2-\omega)^2}{4\omega} \mu(A) + \omega \, \delta(A)]$$

où l'on a utilisé les notations

$$(66) \qquad \left| \begin{array}{l} \mu(A) = \max_{x \neq 0} \dfrac{x^T Dx}{x^T Ax} \; , \\ \delta(A) = \max_{x \neq 0} \dfrac{x^T(ED^{-1}E^T)x - \frac{1}{4} x^T Dx}{x^T Ax} . \end{array} \right.$$

Tournez la page S. V. P.

Q 14 .

a) Montrer que la borne de (65) est minimale pour $\omega = \omega^*$, avec

(67) $$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{2(1 + 2\,\delta(A))}{\mu(A)}}}$$

et que

(68) $$\sigma(A , C(\omega^*)) \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \delta(A)}\ \sqrt{\mu(A)} + \frac{1}{2} .$$

b) Montrer que, si la matrice A du système vérifie

(69) $$\delta(A) \leqslant 0$$

alors

(70) $$\sigma(A , C(\omega_o^*)) \leqslant \sqrt{\frac{\mu(A)}{2}} + \frac{1}{2}$$

pour $\omega = \omega_o^*$, avec

(71) $$\omega_o^* = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{2}{\mu(A)}}} .$$

c) Déduire que dans ce cas, la matrice $\hat{A}$ du système préconditionné par $C(\omega_o^*)$ vérifie

(72) $$\kappa(\hat{A}) \leqslant \sqrt{\frac{\kappa(A)}{2}} + \frac{1}{2} .$$

Q 15 . On introduit les notations

(73) $$\hat{A} = D^{-1/2}\, A\, D^{-1/2} \quad , \quad \hat{E} = D^{-1/2}\, E\, D^{-1/2}$$

avec $(D^{1/2})_{ij} = \sqrt{D_{ij}} = \delta_{ij}\sqrt{A_{ii}}$ et $D^{-1/2} = (D^{1/2})^{-1}$,

d'où

(74) $$\hat{A} = I - \hat{E} - \hat{E}^T .$$

a) Etablir l'identité

(75) $$\delta(A) = \max_{y \neq 0} \frac{y^T \hat{E}\, \hat{E}^T y - \frac{1}{4} y^T y}{y^T \hat{A}\, y}$$

et déduire que la condition (69) est équivalente à la suivante

(76) $$\rho(\hat{E}\, \hat{E}^T) \leqslant 1/4 .$$

b) Déduire l'implication

(77) $$\|\hat{E}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } \|\hat{E}^T\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \delta(A) \leqslant 0$$

où $\|M\|_\infty = \max_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |M_{ij}|$ est la norme d'opérateur associée à $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{N} |x_i|$.

c) Etablir la minoration

(78) $$\delta(A) \geqslant \frac{\lambda_N(\hat{A}) - 2}{4} .$$

On pourra d'abord établir les relations :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^N - \{0\} \ , \ y^T y . y^T \hat{E}\, \hat{E}^T y \geqslant (y^T \hat{E}\, y)^2 = \frac{1}{4} (y^T \hat{A}\, y - y^T y)^2 .$$

PARTIE 4

Dans le but d'apprécier l'efficacité pratique des méthodes G.C. et G.C.P.-S.S.O.R. introduites plus haut, on va les appliquer à la résolution du problème modèle constitué par le discrétisé classique du problème de Dirichlet sur le carré unité :

(79) $$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega =]0 , 1[^2 \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega . \end{array} \right.$$

Il s'agit de déterminer la fonction discrète u_h définie sur l'ensemble des noeuds $\mathcal{N}_h = \{(kh , \ell h) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (k , \ell) \in \mathbb{N}^2\} \cap \bar{\Omega}$, le pas h du maillage étant donné par

(80) $$h = 1/(n+1) \quad , \quad n \text{ entier} \geqslant 1 ,$$

et vérifiant les équations

(81) $$4\, u_{k,\ell} - u_{k-1,\ell} - u_{k+1,\ell} - u_{k,\ell-1} - u_{k,\ell+1} = h^2\, f_{k,\ell} \ , \ (kh , \ell h) \in \mathcal{N}_h \cap \Omega$$

(82) $$u_{k,\ell} = 0 \ , \ (kh , \ell h) \in \mathcal{N}_h \cap \partial\Omega$$

où l'on a utilisé les notations

(83) $$u_{k,\ell} = u_h(kh , \ell h) \quad , \quad f_{k,\ell} = f(kh , \ell h) .$$

Les inconnues de bord étant facilement éliminées par (82), on s'intéresse au système associé aux noeuds intérieurs, c'est-à-dire à $\mathcal{N}_h \cap \Omega$, en remarquant qu'à chaque noeud (k,ℓ) de $\mathcal{N}_h \cap \Omega$ sont associées l'inconnue $u_{k,\ell}$ et l'équation de second membre $h^2 f_{k,\ell}$; pour obtenir un système linéaire sous la forme matricielle (6), il suffit de choisir une numérotation de ces noeuds de 1 à N , avec

(84) $$N = \text{card}(\mathcal{N}_h \cap \Omega) = n^2 .$$

Tournez la page S. V. P.

Q 16 . Montrer que, pour la numérotation lexicographique définie par

(85) $\quad$ numéro$((k,\ell)) = i = (\ell-1)n + k \quad , \quad x_i^* = u_{k,\ell}$,

et la partition $\{1,\dots,N\} = \bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell$, $I_\ell = \{i \ ; \ i = (\ell-1)n+k \ , \ k = 1 \text{ à } n\}$,

la matrice A est tridiagonale par blocs, les blocs non nuls, de taille $n \times n$, étant donnés par

(86) $$\left| \begin{array}{l} A_{\ell\ell} = H \ , \ \ell = 1 \text{ à } n \\ A_{\ell,\ell-1} = A_{\ell-1,\ell} = -I \ , \ \ell = 2 \text{ à } n \end{array} \right.$$

où I est l'identité et H la matrice tridiagonale $\begin{vmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

C'est cette numérotation et le système correspondant qui sont considérés dans la suite.

Q 17 .

a) Montrer que les vecteurs $x^{(p,q)}$, $p,q = 1$ à n , définis par

(87) $\quad x_i^{(p,q)} = u_{k,\ell}^{(p,q)} = \sin(k\,p\,\pi\,h)\,\sin(\ell q\,\pi h)$

sont vecteurs propres de A avec les valeurs propres respectives

(88) $\quad \lambda^{(p,q)} = 4\left(\sin^2 \frac{p\pi h}{2} + \sin^2 \frac{q\pi h}{2}\right)$.

b) En admettant l'indépendance linéaire des $x^{(p,q)}$, $p,q = 1$ à n , montrer que

(89) $\quad \Lambda(A) = \{\lambda^{(p,q)} \ ; \ p,q = 1 \text{ à } n\}$

et que A est élément de $\mathcal{P}_N$.

c) Déduire que le conditionnement de A est

(90) $\quad K(A) = \operatorname{cotg}^2 \left(\frac{\pi h}{2}\right)$

avec

(91) $\quad \frac{4}{\pi^2} h^{-2} - 1 < K(A) < \frac{4}{\pi^2} h^{-2}$,

ce qui montre un comportement en $O(h^{-2})$ lorsque $h \to 0$.

Q 18 .

a) Montrer qu'ici :

(92) $\quad \mu(A) = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\pi h}{2}}$,

où μ est défini par (66) .

b) En utilisant (77),(78) montrer que A vérifie

$$-\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} \leqslant \delta(A) \leqslant 0 \ .$$

c) En utilisant Q 14, montrer que pour la valeur $\omega = \frac{2}{1 + 2 \sin \frac{\pi h}{2}}$,

le préconditionnement S.S.O.R. conduit à un $K(\tilde{A})$ vérifiant

(93) $\quad K(\tilde{A}) \leqslant \frac{1}{2 \sin \frac{\pi h}{2}} + \frac{1}{2} < h^{-1} + \frac{1}{2}$

ce qui, par comparaison à (91), montre tout l'intérêt de la méthode.

• • ° •

PROBLEME DE MECANIQUE GENERALE .. Session de 1988

Nous proposons l'étude du régulateur de Watt. C'est un dispositif qui permettait de contrôler l'ouverture de soupape alimentant une machine à vapeur, assurant le maintien d'une vitesse de rotation constante.

I- Description du mécanisme :

Le système est monté sur l'axe commun $\overrightarrow{DO}$ parallèle à l'axe vertical ascendant $\overrightarrow{z_0}$ du repère Galiléen $R_0(O; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. L' axe $\overrightarrow{DO}$ peut être relié à la machine $\mathcal{B}$ qui lui transmet alors un mouvement de rotation imposé autour de $\overrightarrow{z_0}$. Dans le cas contraire on supposera que l'axe $\overrightarrow{DO}$ est maintenu en D par une liaison rotoïde (ou pivot) parfaite d'axe $\overrightarrow{z_0}$. On notera φ l'angle de cette rotation, et $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_0}$ la vitesse angulaire correspondante. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = - g\,\overrightarrow{z_0}$.

Le régulateur de Watt est un mécanisme composé de cinq solides S_1, S_1', S_2, S_2' et S_3 situés dans un plan, articulés à l'aide de liaisons parfaites. En voici la description détaillée:

a) S_1 et S_1' sont des tiges rigides sans masse, de longueur a, ayant une masse ponctuelle m fixée à une de leurs extrémités notées respectivement P et P'. Les deux autres extrémités de S_1 et S_1' sont articulées avec $\overrightarrow{DO}$ en un point O par une liaison rotoïde (ou pivot) d'axe $(O; \vec{y})$ perpendiculaire à $\overrightarrow{z_0}$.

L'axe $\vec{y}$ fait partie du repère tournant $R (O; \vec{x}, \vec{y}, \overrightarrow{z_0})$ solidaire avec l'axe $\overrightarrow{DO}$. L'angle φ est donc défini comme l'angle entre $\overrightarrow{x_0}$ et $\vec{x}$, ou

entre $\overrightarrow{y_0}$ et $\vec{y}$, mesuré autour de $\overrightarrow{z_0}$. Les tiges S_1 et S_1' se trouvent toujours dans le plan $(O; \vec{x}, \overrightarrow{z_0})$.

On notera :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} \quad , \quad \vec{u'} = \frac{\overrightarrow{OP'}}{\|\overrightarrow{OP'}\|}$$

et α l'angle entre $\vec{u}$ et $-\overrightarrow{z_0}$ mesuré autour de $\vec{y}$.

On a : $\overrightarrow{OP} = a \sin\alpha\,\vec{x} - a \cos\alpha\,\overrightarrow{z_0}$

b) S_2 et S_2' sont deux tiges rigides sans masse, de longueur ℓ chacune. Elles sont articulées avec le solide S_3 par une liaison rotoïde d'axe parallèle à $\vec{y}$ au point C où se rencontrent leurs extrémités. Les deux autres extrémités sont articulées avec S_1 et S_1' aux points A et A' respectivement par des liaisons rotoïdes d'axe $\vec{y}$ et l'on a :

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OA'}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{A'C}\| = \ell$$

de façon à ce que, à tout instant, OACA' forme un losange plan de côté ℓ, situé dans le plan $(O; \vec{x}, \overrightarrow{z_0})$. On notera :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} \quad , \quad \vec{v'} = \frac{\overrightarrow{CA'}}{\|\overrightarrow{CA'}\|} .$$

c) Le solide S_3 est un cylindre de révolution plein de rayon r de hauteur 2b et de masse M. Son axe de symétrie coïncide avec l'axe $(O; \overrightarrow{z_0})$ et son centre coïncide avec C. S_3 peut glisser sans frottement le long de l'axe $(O; \overrightarrow{z_0})$ et tourner autour de cet axe avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}$ que le reste du système (liaison verrou ou pivot glissant). L'articulation de S_2 et S_2' avec S_3 est réalisée à l'aide d'une liaison rotoïde d'axe $(C; \vec{y})$ encastrée dans S_3, dont on négligera les effets sur la matrice d'inertie de S_3.

d) Un ressort de rigidité k et de longueur ℓ_0 est placé entre la machine $\mathcal{B}$ et le cylindre S_3. Son extrémité inférieure se trouve toujours au point D sur l'axe $(O; \overrightarrow{z_0})$. On pose $\overrightarrow{DO} = h\,\overrightarrow{z_0}$; la longueur du ressort à un instant donné est donc $\|\overrightarrow{DC}\| - b$. Ce ressort ne perturbe pas la libre rotation du dispositif autour de son axe.

La figure représente le régulateur de Watt vu dans le plan $(O; \vec{x}, \overrightarrow{z_0})$. Si la rotation autour de $(O; \overrightarrow{z_0})$ n'est pas imposée, le système possède deux degrés de liberté : α et φ.

T.S.V.P.

II- Etude statique :

On suppose pour l'instant que $\vec{\omega} = \vec{0}$. Le repère R coïncide donc avec R_0.

a) Déterminer $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CD}$ en fonction des données géométriques du problème h, a, ℓ et de l'angle α.

b) Déterminer la force $\overrightarrow{F_r}$ exercée par le ressort sur le solide S_3.

c) Décrire les efforts s'exerçant sur la tige CA. Par application du principe fondamental de la statique que peut-on déduire à propos des efforts (résultante et moment) exercés sur cette tige?

d) Donner la description complète de tous les efforts impliqués.

e) Par application du principe fondamental de la statique, déduire les résultantes de tous ces efforts y compris pour ceux s'exerçant en O et en D. Peut-on déterminer complètement les moments des efforts? Donnez votre interprétation.

f) En déduire α_0 correspondant à la position d'équilibre.

III- Application du principe de d'Alembert :

On rappelle que le principe de d'Alembert statique consiste à écrire que la somme des puissances virtuelles $\mathcal{P}^*$ de tous les efforts extérieurs agissant sur le système est nulle pour l'état d'équilibre .

$$\text{donc} \qquad \mathcal{P}^* = \sum_i \overrightarrow{F_i} \cdot \vec{V}_i^* + \sum_j \overrightarrow{\mathcal{M}_j} \cdot \overrightarrow{\omega_j^*} = 0$$

où $\overrightarrow{F_i}$ sont les résultantes des efforts extérieurs agissant sur toutes les parties du système et $\overrightarrow{\mathcal{M}_j}$ les moments. $\overrightarrow{V_i^*}$ et $\overrightarrow{\omega_j^*}$ sont respectivement les vitesses et les vecteurs rotations virtuelles arbitraires compatibles avec les liaisons qui sont supposées parfaites.

On peut remplacer ces expressions par les sommes des travaux virtuels, puisque:

$$\overrightarrow{V_i^*} \cdot \delta t = \delta \overrightarrow{OP_i^*} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{w_j^*} \cdot \delta t = \delta \overrightarrow{\theta_j^*}$$

a) En supposant $\varphi = 0$, donc $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z_0}) = R_0(O; \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ expliciter les déplacements virtuels des points P, P' et C en fonction d'une variation arbitraire $\delta\alpha$.

b) Appliquer le principe de d'Alembert statique au système, en considérant les efforts exercés par le ressort comme extérieurs. En déduire la (ou les) position d'équilibre.

Le principe de d'Alembert peut être généralisé pour le cas dynamique: On remplace les résultantes $\overrightarrow{F_i}$ par $\overrightarrow{F_i} - m_i \overrightarrow{\Gamma_i^*}$ et les moments $\overrightarrow{\mathcal{M}_j}$ par $\overrightarrow{\mathcal{M}_j} - \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_j \overrightarrow{\omega_j^*})$. Dans cette expression, m_i et $\mathbb{I}_j$ sont les masses et les matrices d'inertie correspondantes calculées en un point judicieux. Les termes complémentaires sont identifiés comme des forces et des moments dus à l'inertie des objets.

On suppose désormais que le dispositif peut tourner librement autour de l'axe $(O; \overrightarrow{z_0})$. Pour simplifier on supposera dans ce qui suit :

$$h - 2\ell - b = \ell_0$$

c) Calculer la matrice d'inertie de S_3 en C dans le repère $(C; \vec{x}, \vec{y}, \overrightarrow{z_0})$.

d) Exprimer les déplacements virtuels de P, P' et S_3 en fonction de $\delta\alpha$ et $\delta\varphi$, variations arbitraires des paramètres α et φ.

e) En appliquant le principe de d'Alembert généralisé au cas dynamique, déduire deux équations de mouvement du système.

IV- Méthode de Lagrange :

a) Trouver l'énergie cinétique totale du système en fonction de α, $\dot{\alpha}$, φ et $\dot{\varphi}$ et des paramètres mécaniques du système.

b) Trouver l'énergie potentielle totale du système. Comme dans III, on suppose que $h - 2\ell - b = \ell_0$.

c) En déduire les deux équations de Lagrange.

d) On impose $\dot{\varphi} = \omega = C^{te}$, $\dot{\alpha} = 0$ et $\ddot{\alpha} = 0$. Trouver alors une nouvelle condition d'équilibre.

T.S.V.P.

V- Etude de la stabilité :

La rotation de l'axe $\overrightarrow{DO}$ étant libre, les équations du mouvement sont non linéaires. Néanmoins, une information valable concernant la stabilité de la position d'équilibre peut être obtenue par la linéarisation de ces équations.

a) Quelle est la condition reliant ω et k pour que le régime stationnaire s'établisse avec la valeur de $\alpha_0 = \pi/4$.

b) Trouver ω avec les valeurs numériques suivantes : $a = 20$ cm, $\ell = 10$ cm, $m = 100$ g, $M = 200$ g, $g = 9{,}81$ m/sec^2, $k = 410$ N/m .

c) Linéariser le système en posant:

$$\alpha = \alpha_0 + \eta(t) \ , \quad \varphi = \omega t + \epsilon(t) \qquad (\alpha_0 = \pi/4 \ )$$

et en considérant toutes les puissances supérieures à 1 de η, ϵ et leurs dérivées comme quantités négligeables.

d) Trouver le polynôme caractéristique du système d'équations, ainsi que les valeurs propres. Le système peut-il être considéré comme stable (toutes les parties réelles des valeurs propres négatives)? Quelle vitesse angulaire de rotation ω peut engendrer une résonance dangereuse?

e) On suppose qu'il existe un terme de frottement dans l'équation correspondant à la variable φ. Les efforts de frottement dans la rotation de l'axe $\overrightarrow{DO}$ ayant un moment de composante sur $\overrightarrow{z_0}$ proportionnelle à la vitesse angulaire:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \overrightarrow{z_0} = - f \dot{\varphi} \overrightarrow{z_0}$$

On suppose de plus qu'en régime stationnaire ($\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{\alpha} = 0$), $- f \dot{\varphi}$ est équilibré par le moment $\vec{m}$ fourni par la machine, tel que $\vec{m} = m \overrightarrow{z_0}$ et $m = f \omega$.

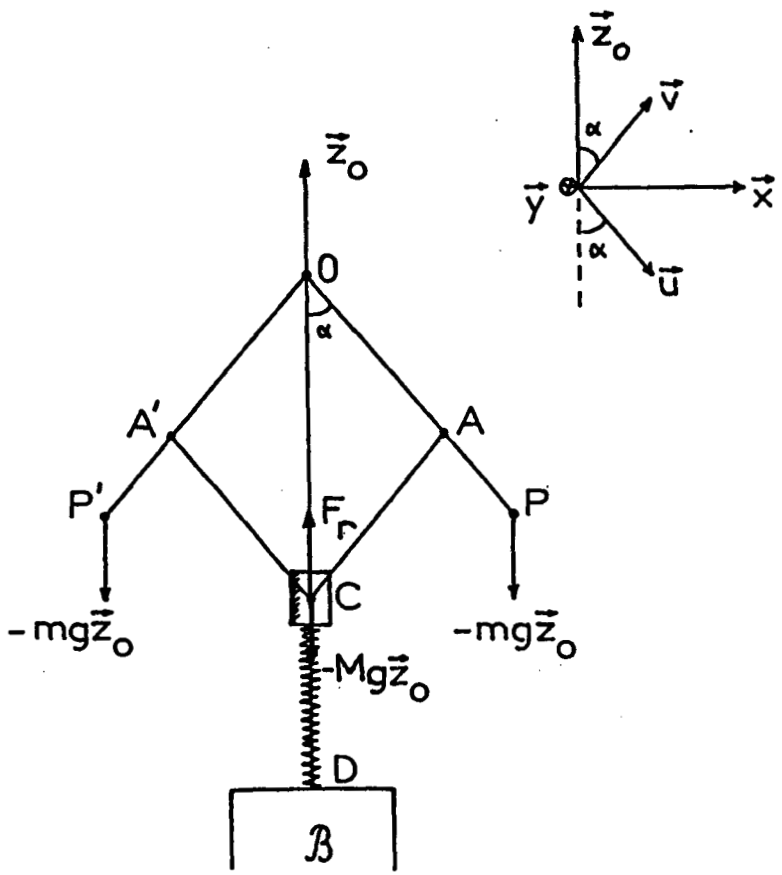
Discuter l'influence du coefficient de frottement f sur les valeurs propres du système linéarisé et sur sa stabilité.

(Rappelons le critère de Routh : pour que les solutions de l'équation de degré trois:

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 = 0$$

aient toutes leurs parties réelles négatives (ce qui implique la stabilité dans notre cas) il faut et il suffit que

$$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \ .)$$



Le régulateur de Watt vu dans le plan $(\vec{x}, \vec{z}_0)$

PROBABILITES ET STATISTIQUES

Session de 1988

AVERTISSEMENT : La deuxième partie est indépendante de la première. On pourra admettre les résultats demandés par l'énoncé pour poursuivre l'étude des questions à condition de l'indiquer clairement.

L'objet du problème est l'étude du comportement asymptotique de certaines marches au hasard $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sur quelques groupes finis G.

Plus précisément, n étant un paramètre lié à la structure du groupe G et croissant avec son cardinal, on détermine une fonction K de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour n assez grand, Y_k ait une loi voisine de la loi uniforme sur G si et seulement si $k > K(n)$.

La loi de Y_k est comparée à la loi uniforme grâce à la distance en variation introduite dans les préliminaires. Cette distance est majorée dans la première partie grâce à la fonction caractéristique (ou transformée de Fourier), dans la seconde partie grâce à l'introduction d'un temps d'arrêt adéquat.

{Les indications concernant les situations concrètes modélisées dans le problème sont destinées à aider les candidats dans leur recherche mais peuvent être ignorées pour répondre aux questions posées}

PRELIMINAIRES

Dans tout le problème, on se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

Q.1. Etant donnés un ensemble fini G, de cardinal card G, et une variable aléatoire X à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$, on note p sa loi de distribution sur G, c'est-à-dire que, pour tout $A \subset G$, $p(A) = P(X \in A)$

et, pour tout g dans G, $p_g = P(X = g)$.

Soit Y une autre variable aléatoire à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ de loi q ; on pose : $$||p-q|| = \max_{A \subset G} |p(A) - q(A)|.$$

1.1. Montrer que $||p-q|| \leqslant 1$.

1.2. Montrer que $||p-q|| = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} |p_g - q_g|$.

1.3. Montrer que $||p-q|| = \frac{1}{2} \max_{||f||=1} |E(f(X)) - E(f(Y))|$

et que $||p-q|| = \frac{1}{2} \max_{||f|| \leqslant 1} |E(f(X)) - E(f(Y))|$

où f parcourt l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{R}$, où $||f|| = \max_{g \in G} |f(g)|$ et où $E(f(X))$ désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire f(X).

1.4. Montrer que, étant donnée une troisième variable aléatoire Z à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ et de loi de distribution r, on a :

$$||p-r|| \leqslant ||p-q|| + ||q-r||.$$

PREMIERE PARTIE

{N.B. : la question Q.5. et les questions suivantes sont indépendantes}.

Dans cette partie, G est un groupe commutatif fini dont on note + la loi de composition et 0 l'élément neutre.

Q.2. On appelle *caractère* de G un homomorphisme χ de (G, +) dans $(\mathbb{C}^*, .)$, groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls. On note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères de G et $\mathbb{1}$ le caractère identique à 1 sur G.

2.1. Soit χ un caractère de G ; montrer que $\chi(0) = 1$ et que, pour tout g de G, $|\chi(g)| = 1$ et $\chi(-g) = \overline{\chi(g)}$ (imaginaire conjuguée de $\chi(g)$).

2.2. n appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers non nuls, déterminer $\hat{G}$ dans les deux cas suivants :

a) $G = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$, ensemble des entiers modulo n muni de l'addition, que l'on notera $\mathbb{Z}_n$ et dont on notera les éléments 0, 1, ..., n-1.

T.S.V.P.

b) $G = \mathbb{Z}_2^n$, ensemble des n-uplets $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ avec g_i égal à 0 ou à 1, muni de l'addition modulo 2 composante par composante. On exprimera g à l'aide des n éléments δ^i de G dont les composantes $(\delta^i)_j$ sont définies par :

pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\begin{pmatrix} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{pmatrix}$, $(\delta^i)_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$;

on exprimera alors $\chi(g)$ à l'aide des $\chi(\delta^i)$ et de l'ensemble $A_g = \{j : g_j = 1\}$. On pourra poser $B_\chi = \{i : \chi(\delta^i) = -1\}$.

2.3. Dans les deux cas a) et b) ci-dessus, montrer qu'on peut établir une bijection entre G et $\hat{G}$ et que, étant donnés deux caractères χ et χ', on a :

$$\sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi'(g)} = \begin{cases} \text{card } G & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2.4. Dans les deux cas a) et b) ci-dessus, montrer que, étant donné g dans G,

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} \text{card } \hat{G} & \text{si } g = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Q.3. Etant donnée une variable aléatoire X à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ de loi de distribution $p_X = (p_g)_{g \in G}$, on appelle <u>fonction caractéristique</u> de X (ou de la loi p_X) et on note $\hat{p}_X$ la fonction de $\hat{G}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\hat{p}_X(\chi) = \sum_{g \in G} \chi(g)\, p_g .$$

3.1. Calculer $\hat{p}_X(\mathbb{1})$.

3.2. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$, on a :

$$\hat{p}_{X+Y} = \hat{p}_X \cdot \hat{p}_Y .$$

3.3. On appelle loi uniforme sur G la loi de distribution u définie par :

pour tout g de G, $u_g = \frac{1}{\text{card } G}$.

Montrer que, si une variable aléatoire U a pour loi u, quelle que soit la variable aléatoire X à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ indépendante de U, X + U a aussi pour loi u.

Q.4. Dans les deux cas a) et b) de Q.2, c'est-à-dire pour $G = \mathbb{Z}_n$ et pour $G = \mathbb{Z}_2^n$,

4.1. Déterminer $\hat{u}$;

4.2. Montrer que, pour toute loi p sur G, on a :

pour tout g dans G, $p_g = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{p}(\chi)\, \overline{\chi(g)}$;

4.3. Montrer que, quelles que soient les deux lois p et p' sur G,

$$\sum_{g \in G} p_g\, p'_g = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{p}(\chi)\, \hat{p}'(\bar{\chi})$$

et $$\sum_{g \in G} |p_g - p'_g|^2 = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{p}(\chi) - \hat{p}'(\chi)|^2 .$$

4.4. En déduire que, pour toute loi p sur G,

$$||p-u||^2 \leqslant \frac{1}{4} \sum_{\chi \neq \mathbb{1}} |\hat{p}(\chi)|^2$$

(on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Dans les deux questions suivantes, on se donne une loi de probabilité q particulière sur G et une variable aléatoire X de loi q.

On appelle "<u>marche au hasard de pas X sur G</u>" une suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où Y_k est la somme de k variables indépendantes de même loi q ; on note q^k la loi de Y_k.

T.S.V.P.

Q.5. Dans cette question $G = \mathbb{Z}_n$ et on suppose n impair supérieur à 2. On définit la loi de probabilité q sur G par $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_{n-1} = \frac{1}{2}$ (et donc $q_k = 0$ pour les valeurs de k distinctes de 1 et de n-1).

{On peut interpréter $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme une marche au hasard sur les n sommets d'un polygone régulier convexe, dont chaque pas conduit, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$, d'un sommet à l'un des deux sommets voisins}

5.1. Montrer qu'il existe une constante α dans $\mathbb{R}^+$, indépendante de k et de n , telle que : $||q^k - u|| \leqslant \alpha \ (\cos \frac{\pi}{n})^k$.
(On pourra démontrer puis utiliser l'inégalité suivante valable pour $0 \leqslant j \leqslant \frac{n-1}{2}$: $\cos \frac{\pi j}{n} \leqslant (\cos \frac{\pi}{n})^j$)

5.2. Soit f la fonction de $\mathbb{Z}_n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour $j \in \mathbb{Z}_n$, $f(j) = (-1)^j \cos \frac{j\pi}{n}$; soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $\mathbb{Z}_n$.
Calculer les espérances mathématiques $E(f(U))$ et $E(f(Y_k))$.

5.3. En déduire $||q^k - u|| \geqslant \frac{1}{2} \ (\cos \frac{\pi}{n})^k$.

5.4. Dans cette question on fait varier simultanément k et n :
on pose $n = 2p + 1$ et

$$||q^k - u|| = \psi(k,p) .$$

K étant une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, montrer que $\left(\psi(K(p),p)\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 si et seulement si $\left(\frac{K(p)}{p^2}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$.

Q.6. Dans cette question et dans les deux suivantes, Q.7 et Q.8, n appartient à $\mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}_2^n$; on considère la loi de probabilité q sur G définie par $q_0 = \frac{1}{n+1}$ et, pour tout i de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, $q_{\delta^i} = \frac{1}{n+1}$ (on rappelle que $(\delta^i)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$) .

6.1. Montrer que, si l'on note $[\![\chi]\!] = \text{card}\{i : \chi(\delta^i) = -1\}$, on a $\hat{q}(\chi) = 1 - 2 \frac{[\![\chi]\!]}{n+1}$.

6.2. On considère une variable aléatoire X de loi q et la marche au hasard $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de pas X sur $\mathbb{Z}_2^n$.

{On peut interpréter $\mathbb{Z}_2^n$ comme décrivant l'ensemble des configurations de deux urnes U_0 et U_1 contenant au total $n+1$ boules numérotées de 0 à n ; la boule numéro 0 est toujours dans U_0 ; pour $1 \leqslant i \leqslant n$, si la boule numérotée i est dans U_0, on pose $g_i = 0$; si elle est dans U_1 , on pose $g_i = 1$. On tire au hasard un des $n+1$ numéros ; si c'est 0 on ne change rien, si c'est j avec $1 \leqslant j \leqslant n$, on change d'urne la boule numéro j . On suppose qu'au départ toutes les boules sont dans U_0 et que les tirages successifs sont indépendants ; alors Y_k donne la configuration après le $k^{\text{ème}}$ tirage}

Montrer que $||q^k - u||^2 \leqslant \frac{1}{4} \left(\exp((n+1) \exp(-\frac{4k}{n+1})) - 1\right)$.

Q.7. Soit f la fonction de $\mathbb{Z}_2^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(g) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{g_i} = n - 2 \ \text{card} \ A_g$$

(on rappelle que $A_g = \{i : g_i = 1\}$) .
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme u sur $\mathbb{Z}_2^n$.

7.1. Calculer l'espérance $E(f(U))$ et la variance $\text{Var}(f(U))$ de $f(U)$.

7.2. On pose $D = \left\{ g \in \mathbb{Z}_2^n : f(g) \geqslant \frac{e^{-2c\sqrt{n}}}{2} \right\}$ où c est un réel fixé.
Montrer que $u(D) \leqslant 4 \ e^{4c}$.

7.3. Calculer $E(f(Y_k))$ et $\text{Var}(f(Y_k))$.

7.4. Pour quelles valeurs de k a-t-on $E(f(Y_k)) > \frac{e^{-2c\sqrt{n}}}{2}$?
Pour une telle valeur de k on pose $\varphi(k,n) = \frac{\text{Var}(f(Y_k))}{\left(\frac{e^{-2c\sqrt{n}}}{2} - E(f(Y_k))\right)^2}$.
Montrer que $q^k(D) \geqslant 1 - \varphi(k,n)$.

T.S.V.P.

7.5. Déduire de 7.2 et 7.4 que $\|q^k - u\| \geqslant 1 - \varphi(k,n) - 4\,e^{4c}$.

Q.8. Dans cette question on fait varier simultanément k et n et on pose $\|q^k - u\| = \lambda(k,n)$.

8.1. Notant $[a]$ le plus grand entier inférieur ou égal à a , on pose

$$K_1(n) = \left[\frac{1}{4}(n+1)\,\ell n\, n + c\,(n+1)\right].$$

Montrer qu'il existe n_o dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(K_1(n), n)$ soit définie pour $n \geqslant n_o$ et étudier le comportement de la suite $\left(\varphi(K_1(n),n)\right)_{n \geqslant n_o}$.

8.2. Déduire de 7.5 une minoration de $\lambda(K_1(n), n)$.

8.3. Pour t réel strictement positif on pose

$$K_2(n,t) = \left[\frac{t}{4}(n+1)\,\ell n\, n\right].$$

Etudier la convergence et la limite de la suite $\left(\lambda(K_2(n,t), n)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ successivement pour $0 < t < 1$ puis pour $t > 1$ en utilisant 6.2.

Comparer ce résultat avec le résultat obtenu en 5.4.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, G est un groupe non commutatif fini dont on note . la loi de composition.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(G, \mathcal{P}(G))$ de loi q et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi q . On appelle "marche au hasard de pas X sur G" la suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ où $Y_1 = X_1$ et, si $k \geqslant 2$, $Y_k = X_k \cdot Y_{k-1}$.

Soit, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathcal{A}_k$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout j de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, Y_j soit une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A}_k)$ dans $(G, \mathcal{P}(G))$.

On note q^k la loi de Y_k et u la loi uniforme sur G (pour tout g de G , $u_g = \frac{1}{\text{card } G}$).

Q.9. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\left(\overline{\mathbb{N}^*}, \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}^*})\right)$ (où $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$) telle que :

a) T est un "temps d'arrêt" par rapport à la suite de tribus $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire que :
pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\{T = k\}$ appartient à $\mathcal{A}_k$.

b) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P(T=k, Y_k=g)$ ne dépend pas de g dans G .

9.1. Montrer que, si la condition a) ci-dessus est satisfaite, la condition b) est équivalente à l'une des deux conditions b') ou b") suivantes :

b') Pour tout g dans G , pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $P(T=k) > 0$, la probabilité conditionnelle que $Y_k = g$ quand $T = k$, notée $P(Y_k = g \mid T = k)$, est égale à u_g .

b") Pour tout g dans G , pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $P(T<k) > 0$, on a $P(Y_k=g \mid T<k) = u_g$.

9.2. On pose, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$s(k) = \operatorname*{Max}_{g \in G} \{1 - P(Y_k=g).\,\text{card } G\}.$$

Montrer que $\|q^k - u\| \leqslant s(k) \leqslant P(T > k)$.

Q.10. Dans cette question et dans les suivantes, G est le groupe S_n des permutations σ de l'ensemble des entiers i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$.

On note $\sigma(i)$ l'image de i par σ .

On considère pour i entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, la permutation τ_i définie par : $\tau_i(1) = i$

$$\tau_i(j) = \begin{cases} j-1 & \text{pour } 2 \leqslant j \leqslant i \quad (\text{si } i \geqslant 2) \\ j & \text{pour } i+1 \leqslant j \leqslant n \quad (\text{si } i \leqslant n-1) \end{cases}.$$

T.S.V.P.

{On peut interpréter S_n comme l'ensemble des battages d'un paquet de n cartes numérotées de 1 à n. Si l'on effectue le battage σ sur un paquet ordonné (de la carte du dessus numérotée 1 à la carte du dessous numérotée n) $\sigma(i)$ est la position de la carte numérotée i dans le paquet battu. Le battage particulier τ_i consiste à prendre la carte du dessus du paquet et à l'insérer en $i^{ème}$ position dans le paquet sans changer l'ordre relatif des autres cartes}

La loi q de la variable aléatoire X à valeurs dans $(S_n, \mathcal{P}(S_n))$ est définie par :

pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\quad q_{\tau_i} = P(X = \tau_i) = \frac{1}{n}$.

{Ce qui revient à choisir au hasard le nouvel emplacement de la carte du dessus dans ce battage élémentaire}

Soit $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la marche au hasard de pas X sur S_n. Pour chaque ω dans Ω et chaque k dans $\mathbb{N}^*$, on note $Y_k(\omega)$ la valeur dans S_n de la variable aléatoire Y_k et $Y_k(\omega, i)$ l'image de l'entier i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ par la permutation $Y_k(\omega)$ {$Y_k(\omega,i)$ est donc la position de la carte numérotée i après k battages élémentaires}.

On définit les $n-1$ applications $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ de Ω dans $\overline{\mathbb{N}^*}$ par :

pour tout ω dans Ω, pour tout j de $\mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$T_j(\omega) = \begin{cases} \text{Min } \{k : Y_k(\omega,n) = n-j\} & \text{s'il existe k dans } \mathbb{N}^* \text{ tel que } Y_k(\omega,n)=n-j \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on pose $T = T_{n-1} + 1$.

{Le $T_j^{ème}$ battage élémentaire est donc le premier pour lequel on insère une $j^{ème}$ carte au-dessous de la carte numérotée n, le $T^{ème}$ est le premier pour lequel cette carte numérotée n est reprise au-dessus du paquet et remise dedans.}

10.1. Montrer que $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}, T$ sont des temps d'arrêt par rapport à la suite $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

10.2. Déterminer la loi de distribution des variables aléatoires T_1 et $T_i - T_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$.

10.3. Montrer que ces variables sont presque sûrement finies.

10.4. Montrer qu'elles sont indépendantes.

10.5. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $T_1, T_i - T_{i-1}, T$.

10.6. Montrer que T satisfait les conditions a) et b) de Q.9 {c'est-à-dire qu'on peut considérer que le paquet est bien mélangé après le $T^{ème}$ battage}.

Q.11. {Problème du collectionneur d'images qui recueille les images au hasard et souhaite compléter sa collection}

On considère une suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ dont la distribution est donnée par :

pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, pour tout j entier tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, $P(Z_k = j) = \frac{1}{n}$.

Pour tout ω de Ω et tout m de $\mathbb{N}^*$ on pose

$$C_m(\omega) = \text{card } \{Z_1(\omega), Z_2(\omega), \ldots, Z_m(\omega)\}$$

égal au nombre de valeurs distinctes de la suite $\{Z_1(\omega), \ldots, Z_m(\omega)\}$.

Pour tout k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ on définit l'application V_k de Ω dans $\overline{\mathbb{N}^*}$ par : pour tout ω de Ω,

$$V_k(\omega) = \begin{cases} \text{Min } \{m : C_m(\omega)=k\} & \text{s'il existe m dans } \mathbb{N}^* \text{ tel que } C_m(\omega) = k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

{c'est quand on recueille la $V_k^{ème}$ image que la collection comporte pour la première fois k images distinctes}.

T.S.V.P.

11.1. Montrer que V_1 et les $V_i - V_{i-1}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\left(\overline{\mathbb{N}^*}, \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}^*})\right)$.

11.2. Déterminer leur loi de distribution.

11.3. En déduire qu'elles sont presque sûrement finies et que V_n a même loi que la variable T définie à la question Q.10.

11.4. Montrer que $P(V_n > k) \leqslant n\,(1 - \frac{1}{n})^k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$ (on pourra considérer les évènements définis pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et k dans $\mathbb{N}^*$ par $A_{i,k} = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} \{Z_j \neq i\}$).

Q.12. Pour tout j entier tel que $2 \leqslant j \leqslant n$, on considère le sous ensemble B_j de S_n formé des permutations σ telles que

$$\sigma(n - j+1) < \sigma(n - j+2) \ldots < \sigma(n).$$

{B_j s'interprète comme l'ensemble des battages qui laissent les j cartes du dessous du paquet initial dans leur ordre initial.}

12.1. Calculer $u(B_j)$.

12.2. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $q^k(B_j) \geqslant P(T - T_{j-1} > k)$.

Q.13. Dans cette question on fait varier simultanément k et n et on pose

$$||q^k - u|| = \lambda(k,n).$$

On pose $K_3(n) = [n \ln n + cn]$ où c appartient à $\mathbb{R}$.

On note $\overline{\lim_{n\infty}}$ et $\underline{\lim_{n\infty}}$ la limite supérieure et la limite inférieure.

13.1. Montrer que, pour tout c dans $\mathbb{R}$, $\overline{\lim_{n\infty}}\ \lambda(K_3(n), n) \leqslant e^{-c}$.

13.2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $c < 0$ tel que

$$\underline{\lim_{n\infty}}\ \lambda(K_3(n),n) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

13.3. On pose $K_4(n, t) = [t\, n \ln n]$.

Etudier, pour $0 < t < 1$ et pour $t > 1$, la suite $\lambda(K_4(n, t), n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Le but du problème est d'étudier les performances d'un certain nombre d'algorithmes qui opèrent sur des données de type géométrique, à savoir des points d'un espace affine euclidien de dimension 2. Chaque point est codé par le couple de ses coordonnées.

On construira en particulier de plusieurs manières l'enveloppe convexe d'un ensemble S de *n* points. Il s'agit du plus petit ensemble convexe qui contient S ou, de manière équivalente, de l'intersection de tous les demi-plans qui contiennent S. Nous noterons *conv*(S) le polygone frontière de cet ensemble convexe, et nous considérerons *conv*(S) comme la suite finie de ses sommets, ordonnés arbitrairement dans le sens positif.

Pour ne pas alourdir les discussions, on supposera dans tout le problème qu'aucun « cas particulier » ne se produit; en particulier, deux points de S n'auront jamais la même abscisse, ni la même ordonnée, et trois points de S ne seront jamais alignés.

Les correcteurs tiendront compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

PREMIERE PARTIE

L'algorithme informel A1 ci-dessous calcule l'enveloppe convexe incrémentalement, en ajoutant un par un les points de S.

ALGORITHME A1

Prétraitement: réétiqueter les points de S de façon que la suite $s_1, \ldots, s_n$ soit triée par abscisses croissantes.

Traitement: {on suppose $n \geq 3$}
Initialisation : Construire $C_3 = conv(s_1, s_2, s_3)$
Itération : **pour** *i* **de** 4 **à** *n* **faire**
{$C_{i-1} = conv(s_1, \ldots, s_{i-1})$}
$C_i \leftarrow$ mise-à-jour(C_{i-1}, s_i)
{$C_i = conv(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i)$}

1°) Montrer qu'il existe deux points *u* et *v* du contour C_{i-1} vérifiant

$$C_{i-1} = \alpha, u, \beta, v, \gamma$$
$$C_i = \alpha, u, s_i, v, \gamma$$
$$s_{i-1} \in u, \beta, v$$

où α, β et γ sont des suites (éventuellement vides) de points consécutifs de S.

En déduire une version informelle de la procédure mise-à-jour(C, s).

2°) Proposer une structure de données pour représenter C_i.

3°) Montrer que la procédure mise-à-jour(C_{i-1}, s_i), dans la phase itérative de A1, prend un temps $O(i)$.

4°) En évaluant le nombre maximum de fois que chaque point de S est examiné au cours de l'exécution de A1, montrer que le temps total de l'étape itérative est aussi en $O(n)$.

T.S.V.P.

5°) En déduire que l'algorithme A1 peut être implanté de façon que son temps d'exécution soit en $O(n \log n)$ dans le cas le pire. Expliquer très clairement comment il faut implanter la phase de prétraitement pour qu'il en soit ainsi.

SECONDE PARTIE

L'algorithme informel A2 ci-dessous divise le problème en deux sous-problèmes qu'il résoud récursivement; puis il fusionne les solutions pour former une solution du problème global.

ALGORITHME A2

Prétraitement : réétiqueter les points de S de façon que la suite $s_1, \ldots, s_n$ soit triée par abscisses croissantes.

Traitement :
si $n \leq 3$
alors construire conv(S) directement
sinon {division} $k \leftarrow n$ div 2; $S_1 \leftarrow \{s_1, \ldots, s_k\}$; $S_2 \leftarrow \{s_{k+1}, \ldots, s_n\}$
{récursion} calculer $conv(S_1)$ et $conv(S_2)$ récursivement
{fusion} $conv(S) \leftarrow$ fusion$(conv(S_1), conv(S_2))$

1°) Montrer qu'il existe deux points u_1 et v_1 sur $conv(S_1)$ et u_2 et v_2 sur $conv(S_2)$ vérifiant

$$conv(S_1) = \alpha_1, u_1, \beta_1, v_1, \gamma_1 \quad \text{et } s_k \in u_1, \beta_1, v_1$$
$$conv(S_2) = \alpha_2, u_2, \beta_2, v_2, \gamma_2 \quad \text{et } s_{k+1} \in u_2, \beta_2, v_2$$
$$conv(S) = \alpha_1, u_1, u_2, \beta_2, v_2, v_1, \gamma_1$$

où α_1, β_1 et γ_1 sont des suites (éventuellement vides) de points consécutifs de S_1, et α_2, β_2 et γ_2 sont des suites (éventuellement vides) de points consécutifs de S_2.

2°) Montrer que l'on peut implanter les données de manière que la phase de fusion de l'algorithme A2 prenne un temps linéaire en le nombre total de points.

3°) En déduire une expression du temps de calcul, dans le cas le pire, de la phase de traitement de l'algorithme A2.

4°) En déduire que l'algorithme A2 peut être implanté de façon que son temps d'exécution soit en $O(n \log n)$ dans le cas le pire.

TROISIEME PARTIE

L'algorithme informel A3 ci-dessous procède de manière incrémentale, comme l'algorithme A1; mais la suite de points dont il part est triée différemment.

ALGORITHME A3

Prétraitement : déterminer le point de S d'ordonnée minimale et le réétiqueter s_1. Réétiqueter les points de S de manière que la suite des angles faits avec l'axe Ox par les vecteurs $s_1s_2, \ldots, s_1s_n$ soit croissante.

Traitement :
{initialisation}
$D_2 = (s_1, s_2)$;
{itération : on complète le contour point par point}
pour i **de** 3 **à** n **faire**
{ajouter s_i à $D_{i-1} = (s_1, u_1, \ldots, u_p, s_{i-1})$ où $u_1 = s_2$}
si le vecteur $s_{i-1}s_i$ fait un angle positif avec u_ps_{i-1}
alors construire $D_i = (s_1, u_1, \ldots, u_p, s_{i-1}, s_i)$
sinon $j \leftarrow \sup\{k \mid 1 \leq k \leq p$ et u_ks_i fait un angle positif avec $u_{k-1}u_k$ (avec s_1s_2 si $k=1)\}$;
construire $D_i = (s_1, u_1, \ldots, u_j, s_i)$
{$conv(S) = D_n$}

1°) a) Pourquoi a-t-on $u_1 = s_2$?
b) Pourquoi a-t-on $conv(S) = D_n$?

2°) Proposer une méthode efficace pour effectuer les tests de la phase itérative et calculer la complexité d'un test en nombre d'opérations arithmétiques élémentaires.

3°) Expliquer en quoi une structure de type « pile » peut être utile pour implanter efficacement la construction des D_i. Proposer une méthode précise pour implanter et gérer les D_i.

4°) Quel est le coût de la construction de D_i à partir de D_{i-1}, dans le cas le pire ?

5°) Combien de fois au maximum un point quelconque de S est-il examiné pendant la phase itérative de A3 ? En déduire le coût de cette phase dans le cas le pire.

6°) Montrer que l'algorithme A3 peut être implanté de façon que son temps d'exécution dans le cas le pire soit en $O(n \log n)$.

QUATRIEME PARTIE

L'algorithme informel A4 ci-dessous construit aussi de proche en proche une suite de sommets qui vaut $conv(S)$ après l'étape finale. Mais à la différence de ce qui se passe pour l'algorithme A3, tout point ajouté à la suite l'est définitivement.

ALGORITHME A4

{initialisation} $i \leftarrow 1$; déterminer le point p_1 de S d'ordonnée minimale $(E_1 = (p_1))$;

{itération}
répéter $(E_i = (p_1, \ldots, p_i))$
soit s le point de S qui minimise l'angle du vecteur p_1s avec le vecteur $p_{i-1}p_i$ (avec l'axe Ox si $i = 1$);
$p_{i+1} \leftarrow s$;
$i \leftarrow i + 1$
jusqu'à ce que $p_i = p_1$ $(conv(S) = (p_1, \ldots, p_{i-1}))$

1°) Montrer que l'algorithme A4 s'arrête bien.

2°) Évaluer le temps de calcul de A4, dans le cas le pire, en fonction du nombre n de points de S et du nombre h de points de $conv(S)$.

3°) Discuter l'intérêt de l'algorithme A4 par rapport aux algorithmes A1, A2 ou A3.

T.S.V.P.

CINQUIEME PARTIE

1°) Montrer que tout algorithme de tri qui procède par comparaisons fait au moins $cn \log n$ comparaisons, dans le cas le pire, où c est une constante réelle positive.

2°) On considère l'application qui au réel x associe le point du plan de coordonnées (x,x^2). L'utiliser pour démontrer que tout algorithme de calcul de l'enveloppe convexe de n points du plan prend dans le cas le pire un temps supérieur à $cn \log n$, quand n tend vers l'infini, pour une certaine constante c.

3°) Proposer un algorithme qui, étant donné n points du plan triés par abscisses croissantes, calcule leur enveloppe convexe en temps linéaire.

SIXIEME PARTIE

On dit qu'un polygone est simple quand deux cotés quelconques non consécutifs ne se coupent pas.

1°) Montrer que tout algorithme qui construit un polygone simple ayant pour sommets n points donnés a priori prend un temps de calcul supérieur à $cn \log n$ quand n tend vers l'infini, pour une certaine constante réelle positive c.

2°) Proposer un algorithme pour résoudre le problème posé à la question précédente et évaluer sa complexité en temps, dans le cas le pire.

SEPTIEME PARTIE

On décompose un ensemble S fini de points du plan en « couches convexes » C_i de la manière suivante : on calcule $C_1 = conv(S)$, puis $C_2 = conv(S_1)$ où $S_1 = S - C_1$, puis $C_3 = conv(S_2)$ où $S_2 = S_1 - C_2$, et ainsi de suite. Le nombre de couches convexes qu'il faut enlever avant d'obtenir la couche contenant s est appelé la « profondeur » de s.

1°) Montrer que tout algorithme qui, étant donné n points du plan, calcule la profondeur de chacun d'eux, prend un temps de calcul supérieur à $cn \log n$ quand n tend vers l'infini, pour une certaine constante réelle positive c.

2°) On calcule toutes les couches convexes en appliquant naïvement leur définition. Montrer que l'algorithme obtenu prend un temps $O(n^2 \log n)$ dans le cas le pire.

3°) S'inspirer de la méthode de l'algorithme A4 pour proposer un algorithme qui calcule les couches convexes en temps $O(n^2)$.

HUITIEME PARTIE

Étant donné un ensemble fini S de points du plan, on dit qu'un point s de S est saillant supérieur gauche s'il n'existe aucun point de S dont l'abscisse est inférieure à celle de s et l'ordonnée supérieure à celle de s. On définit de façon analogue les propriétés d'être saillant supérieur droit, saillant inférieur gauche et saillant inférieur droit. Enfin, un point est dit saillant s'il possède au moins une de ces quatre propriétés.

1°) Montrer que tout point de $conv(S)$ est saillant. Et réciproquement ?

2°) Montrer que tout algorithme qui, étant donné n points du plan, calcule les points saillants de cet ensemble prend un temps de calcul supérieur à $cn \log n$ quand n tend vers l'infini, pour une certaine constante réelle positive c.

3°) Proposer un algorithme qui calcule les points saillants en temps $O(n \log n)$ dans le cas le pire.

4°) On dit qu'un ensemble de n points forme une « configuration » s'ils se répartissent sur une grille nxn de façon que deux points quelconques de l'ensemble n'aient jamais la même abscisse, ni la même ordonnée.

On désigne par $S_{n,k}$ le nombre de configurations de n points ayant k points saillants supérieurs gauches.

Calculer le nombre moyen de points saillants supérieurs gauches d'une configuration de n points, c'est-à-dire la quantité $(\Sigma_k\ kS_{n,k})/(\Sigma_k\ S_{n,k})$.

5°) On désigne par $A_{n,k}$ le nombre de configurations de n points ayant k points saillants.

Calculer le nombre moyen de points saillants d'un ensemble de n points, c'est-à-dire la quantité $(\Sigma_k\ kA_{n,k})/(\Sigma_k\ A_{n,k})$. Quel est le comportement asymptotique de cette quantité quand n tend vers l'infini ?

6°) De quelles situations plus « réalistes » la notion de configuration pourrait-elle être un modèle ?

7°) Montrer qu'on peut calculer les points saillants d'une configuration de n points en temps moyen linéaire en n.

o o o

o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail